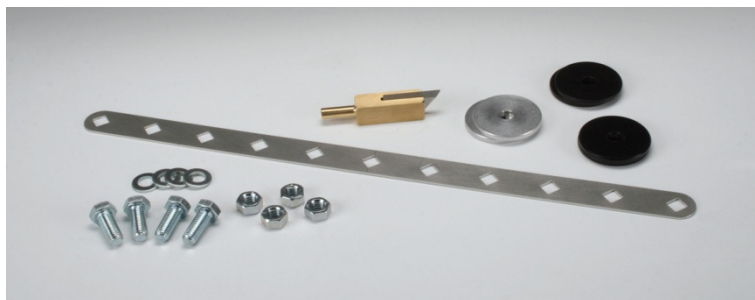


Nummer	135610	Emne	Mekanik, stive legemer	Foreslås til	gymA	p.	1/5
Version	2016.08.11 / HS	Type	Elevøvelse				



## Formål

Vi undersøger et fysisk pendul, dvs. et sammensat, stift legeme og sammenholder målte og beregnede værdier for inertimomenter.

## Princip

Inertimomentet bestemmes gennem måling af svingningstider for det fysiske pendul. Hovedvægten lægges på symmetriske massefordelinger, således at pendulets massemidt punkt er placeret i midten af pendulet. Dette forenkler beregningerne.

Eksperimentet kan udvides til vilkårlige massefordelinger.

## Apparatur

(Se detaljeret apparaturliste på sidste side)

Det fysiske pendul består af en stålstang med en række huller, som dels anvendes som pendulets leje, dels bruges til fastgørelse af lodder. Den faste del af lejet udgøres af en solid knivsæg, som fastgøres til normalt stativmateriale eller endnu bedre en bordkant.

Apparatet leveres med 4 skiver af stål og 2 skiver af aluminium. Skiverne anvendes parvis – anbragt på hver side af stålstangen med en bolt. To skiver, en bolt og en møtrik kaldes herefter et *lod*.

Tyngdepunkt, ophængspunkt og inertimoment kan varieres på utallige måder. Til beregningsarbejdet får man god brug for Steiners sætning samt en række formler for inertimomenter af de forskellige bestanddele af pendulet. Disse sammenhænge findes i afsnittet *Inertimomenter*. De praktiske beregninger udføres mest fordelagtigt i et regneark.

(Der medfølger to ekstra sæt bolte og møtrikker, som anvendes som "trimmelodder" i forbindelse med Besselpendulet – se eksperiment 135630. Til Besselpendulet anvendes desuden 4 spændeskiver sammen med de store lodder.)

## Måling af svingningstid

### Med stopur

Man måler tiden for et antal *hele* svingninger og dividerer med antallet. Præcisionen øges, hvis man starter og stopper uret, når pendulet passerer sit laveste punkt, hvor dets hastighed er størst. Sigt efter noget lodret bag pendulet, og flyt ikke hovedet mellem start og stop.

I praksis kan man næppe opnå lavere usikkerhed end 0,2 s.

Ønskes en nøjagtighed på f.eks. 0,5 %, skal den samlede måletid således være mindst 40 s.

### Med dataopsamlingsudstyr

Placér en bevægelsessensor ca. 20 cm fra pendulet – helst ud for et lod. (Det kræver held at måle på stangen alene, men det kan lade sig gøre.) Indstil dataopsamlingsprogrammet til at registrere *position* med en målefrekvens på f.eks. 100 Hz. Kontrollér, at der opsamles en nogenlunde sinusformet kurve – der må ikke være sære takker, som indikerer, at sensoren rammer ved siden af målet.

Mål i "passende lang tid" – ca. et minut.

Tilpas en *dæmpet svingning* til målepunkterne. Sørg for at indstille programmet, så der vises tilstrækkeligt mange cifre på parametrene!

Nogle programmer afleverer direkte svingningstiden  $T$ , andre bruger  $\omega = 2\pi/T$ .

### Med fotocelle og tæller

Hæng pendulet lodret og helt i ro. Anbring fotocellen, så lysstrålen lige akkurat "rører" en lodret kant nederst på pendulet (kanten af stangen eller evt. kanten af et lod – se foto).

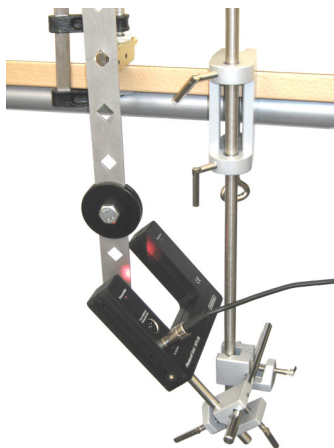
Fotocelle type 197550 har en grøn lysdiode, som slukker, når lysstrålen afbrydes.

Når pendulet svinger (små udsving!), skal lysstrålen være afbrudt i hele den ene halvperiode og passere i hele den anden. Derved bliver en svingningstid netop tiden fra starten af en afbrydelse til den næste.

Med **tæller 200250** er proceduren som følger

Fotocellen sættes i DIN-bøsning A

1. Træk pendulet en smule væk fra lysstrålen under de følgende punkter
2. Tryk *Select*, indtil lampen ud for *Period* lyser
3. Vent, indtil der er lys i lampen *Continuous*, tryk derefter på *Memory/Continuous*
4. Tryk til sidst på *Start/Stop*
5. Herefter kan pendulet slippes



Resultaterne vises som gennemsnit af to svingningstider – skriv ned. Fortsæt passende længe. Beregn gennemsnittet.

### Med SpeedGate

SpeedGate har to lysstråler; vi bruger kun stråle "X".

Der er en markering i displayet, som tændes, når lysstrålen er afbrudt. Med pendulet i ro skal lysstrålen netop strejfe kanten af pendulstangen.

Brug kun små udsving: Lysstrålen skal være afbrudt i den halve periode. Vælg *Period* og *Mean Period* (ikke *Pendulum Period*).

1. Sæt pendulet i små svingninger
2. Tryk *Reset*
3. Aflæs middelperioden efter den ønskede måletid er gået.

## En smule teori

Vi vil betragte et stift legeme som sammensat af et stort antal små bestanddele.

Legemets **inertimoment** omkring en given akse er da givet som en sum af bidrag fra de enkelte bestanddele, hver på formen

$$I_j = m_j \cdot r_j^2$$

hvor  $m_j$  er massen af bestanddel nr.  $j$  og  $r_j$  er afstanden mellem denne og omdrejningsaksen.

Det samlede inertimoment kan dermed skrives på formen

$$I = \sum_j I_j$$

I praksis bestemmes inertimomenter ved integration. Hvis legemets form er tilstrækkeligt simpel, kan dette gøres analytisk. Der er en række relevante eksempler på dette i et senere afsnit.

Kaldes et legemes inertimoment om en akse gennem dets tyngdepunkt for  $I_G$ , kan inertimomentet  $I$  om

en vilkårlig anden akse, som er parallel med den første, bestemmes vha. **Steiners sætning**:

$$I = I_G + Ma^2$$

Her er  $M$  det betragtede legemes masse og  $a$  er afstanden mellem de to akser.

Denne sætning er uhyre nyttig ved beregning af inertimomenter, når man ser bort fra de allermest simple tilfælde.

Betegnelsen **fysisk pendul** anvendes, når et stift legeme er ophængt i en akse, som ikke går gennem tyngdepunktet.

**Svingningstiden** for det fysiske pendul er givet ved

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M a g}}$$

hvor  $I$  er inertimomentet om omdrejningsaksen,  $M$  er den samlede masse,  $a$  er afstanden mellem omdrejningsaksen og massemidtunktet,  $g$  er tyngdeaccelerationen..

## Inertimomenter

Det følger af definitionen på inertimoment, at et stift legemes samlede inertimoment om en akse kan bestemmes som en sum af inertimomenter for legemets bestanddele (om samme akse).

I det konkrete tilfælde vil vi dele pendulstangen op i et rektangulært stykke samt to halvcirkelformede ender. (Herfra skal fratrækkes materialet fra de 11 kvadratiske huller, hvis man vil være helt præcis.) Massen af stangen fordeles på de tre dele proportionalt med deres areal.

De store skiver har form som en cylinder med et cylinderformet hul i midten. Lodderne fastholdes med en bolt, som vi kan betragte som punktformet. (Der skal stadig tages hensyn til boltens masse, det er blot dens inertimoment om eget centrum, vi sætter til 0.)

Herunder følger nogle formler for inertimomenter.

Rektangel med dimensioner  $b \times d$  og masse  $m$ :

$$I_Z = \frac{m}{12} \cdot (b^2 + d^2)$$

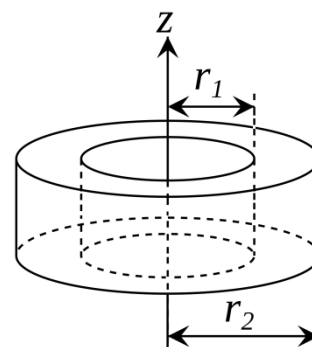
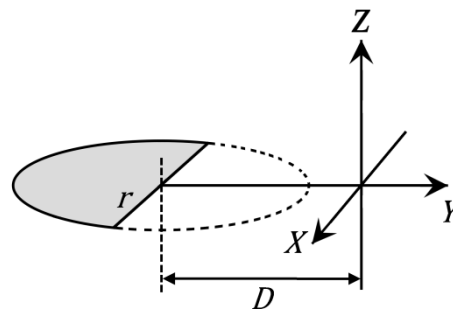
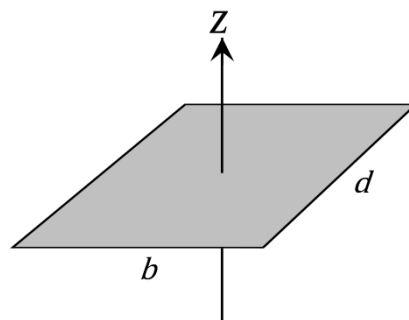
Halvcirkel med radius  $r$  og masse  $m$ , forskudt stykket  $D$ :

$$I_Z = m \cdot \left( D^2 + \frac{r^2}{2} + \frac{8Dr}{3\pi} \right)$$

Cylinder med ydre radius  $r_2$ , indre radius  $r_1$  og masse  $m$ :

$$I_Z = \frac{m}{2} \cdot (r_1^2 + r_2^2)$$

Arbejdet med at holde rede på alle de enkelte dele af pendulet kan med fordel ske i et regneark.



## Fysisk pendul – forsøgsbeskrivelse

Til arbejdet med det generelle fysiske pendul anvendes hverken spændeskiverne eller de ekstra sæt bolte. Der er variationsmuligheder nok endda!

Eksperiment 1, 2 og 3 herunder kan udføres uafhængigt af hinanden.

Metalskiverne fastspændes med boltene – det er tilstrækkeligt at stramme dem godt med fingrene.

Knivlejet kan til simple demonstrationsforsøg spændes op i et stativ med en A-fod eller en bordklemme.

Mere præcise resultater opnås ved at spænde ophænget fast til en solid bordkant med en skruetvinge. Helst lige over et bordben. Brug gerne et bord, der er fastgjort til en væg.

NB: Der er forskel på positionen, når et hul anvendes som ophæng (øvre kant) eller som placering for et lod (centrum). Vær omhyggelig med at bruge de korrekte værdier.

*Amplituden for svingningerne skal være lille. Omkring en halv centimeter er fint.*

### 1 – Stangens inertimoment

Mål svingningstiden som et gennemsnit over mindst 20 svingninger for hvert af de 5 mulige ophængspunkter (det midterste inklusive).

Udmål afstanden fra stangens midtpunkt til hver af de fem ophængspunkter præcist. Midtpunktet er markeret med en tynd linje – det kan være en ide midlertidigt at forlænge linjen hen over det midterste hul ved hjælp af kanten af en strimmel tape. (Disse afstande skal også bruges i de følgende forsøg.)

### 2 – Symmetrisk massefordeling

Vælg en position af lodderne – f.eks. det næstyderste hul. Placeringen skal være symmetrisk, så hele pendulet stadigvæk har massemidtpunkt i stangens midtpunkt.

For at undgå, at pendulet "kæntrer", når det hænges op i det midterste hul, kan boltene pege modsat hinanden.

Mål svingningstiden som et gennemsnit over mindst 20 svingninger for hvert af de 5 mulige ophængspunkter (det midterste inklusive).

Hvis du ikke allerede har bestemt disse mål: Udmål afstanden fra stangens midtpunkt til hver af ophængspunkterne præcist. Gentag eventuelt måleserien med lodderne i en ny – men stadigvæk symmetrisk – position.

### 3 – Vilkårlig massefordeling

Vi behandler nu situationen, hvor der ikke længere er symmetri om stangens midtpunkt. Dermed skal vi ikke blot bestemme inertimomentet for pendulet, men også massemidtpunktet.

Udmål afstanden fra stangens midtpunkt til hver af de mulige ophængspunkter præcist. Midtpunktet er markeret med en tynd linje – det kan være en ide midlertidigt at forlænge linjen hen over det midterste hul ved hjælp af kanten af en strimmel tape.

For at kunne angive positioner entydigt, fastlægger vi en koordinatakse langs stangen, med nulpunkt i stangens midtpunkt og den positive retning opad. Positioner under stangens midtpunkt er negative.

Kald ophængets position  $x_O$ . Loddernes positioner betegnes  $x_A$  hhv.  $x_B$  og deres masser  $m_A$  hhv.  $m_B$ .

Noter omhyggeligt forsøgsbetingelserne, og mål svingningstiderne som gennemsnit over mindst 20 perioder.

## Beregninger

### 1 – Stangens inertimoment

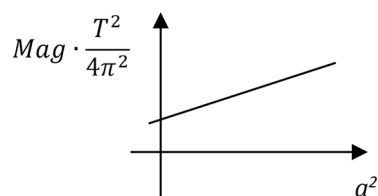
Formlen for svingningstiden kan omskrives til følgende

$$Mag \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} = I$$

Da massemidtpunktet ligger i stangens midtpunkt, er alle de indgående størrelser på venstre side kendte. Den samlede masse  $M$  er lig med stangens masse  $m_S$ . For stangen uden lodder kan højre side omskrives ved hjælp af Steiners sætning:

$$I = I_S + m_S \cdot a^2$$

Det vil sige, at hvis størrelsen  $Mag \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$  afbildes som funktion af  $a^2$ , skal resultaterne ligge på en ret linje med stangens masse  $m_S$  som hældningskoefficient og stangens inertimoment om centeret  $I_S$  som skæring med y-aksen.



Til sammenligning kan man beregne stangens inertimoment om midtpunktet ved at opdele den i to halvcirkulære ender samt et rektangulært stykke i midten – se også afsnittet *Inertimomenter*. Fejlen ved at se bort fra de kvadratiske huller er forholdsvis lille – men husk at fraregne deres areal, når stangens samlede masse skal fordeles proportionalt med de tre deles arealer.

### 2 – Symmetrisk massefordeling

Formlen for svingningstiden kan omskrives til følgende

$$Mag \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} = I$$

Da lodderne hænger symmetrisk, ligger massemidtpunktet i stangens midtpunkt, så alle de indgående størrelser på venstre side er kendte. Højre side omskrives ved hjælp af Steiners sætning:

$$I = I_G + M \cdot a^2$$

Det vil sige, at hvis størrelsen  $Mag \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$  afbildes som funktion af  $a^2$ , skal resultaterne ligge på en ret linje med den samlede masse  $M$  som hældningskoefficient og pendulets inertimoment om massemidtpunktet  $I_G$  som skæring med y-aksen.

Vi kan sammenligne den fundne værdi for  $I_G$  med en beregnet, idet

$$I_G = I_S + 2(I_L + m_L x_L^2)$$

hvor  $I_S$  er stangens inertimoment om dens midtpunkt,  $I_L$  er et lods inertimoment om loddets centerakse,  $m_L$  er massen af et lod og  $x_L$  er afstanden mellem stangens og loddets midtpunkter.

$I_S$  og  $I_L$  beregnes ved hjælp af formlerne i afsnittet *Inertimomenter*. For  $I_S$ , se også afsnittet **1 – Stangens inertimoment**. Lodderne betragtes som to cylindre, der skal behandles som udstrakte legemer, samt en bolt og en møtrik, der med god tilnærmelse kan betragtes som punktformede.

Hvis der er udført mere end en måleserie, bliver graferne parallelle.

### 3 – Vilkårlig massefordeling

Eftersom stangens massemidtpunkt har koordinaten 0, får vi for massemidtpunktets position  $x_G$ :

$$x_G = \frac{m_A \cdot x_A + m_B \cdot x_B}{M}$$

Afstanden fra omdrejningsaksen til massemidtpunktet bestemmes som

$$a = x_O - x_G$$

Pendulets inertimoment om ophænget beregnes ved at summere bidrag fra stangen og de to lodder

$$I = I_S + m_S \cdot x_O^2 + I_A + m_A \cdot (x_O - x_A)^2 + I_B + m_B \cdot (x_O - x_B)^2$$

hvor  $I_A$  og  $I_B$  betegner inertimomentet af lod A og B omkring loddets centerakse.

Nu kan en teoretisk værdi for svingningstiden beregnes og sammenlignes med den eksperimentelle.

## Diskussion og evaluering

I alle tre eksperimenter er det muligt at sammenligne eksperimentelle og teoretiske værdier.

Det er oplagt i behandlingen af resultaterne at interessere sig for måleusikkerheden på de målte størrelser.

## Noter til læreren

### Benyttede begreber

Massemidt punkt  
– forudsættes kendt

Inertimoment  
Steiners sætning  
svingningstid for fysisk pendul  
– formler er resumeret.

### Matematiske forudsætninger

Ligningsløsning, trigonometriske funktioner,  
anvendelse af regneark, grafer.

Ønskes formler for inertimomenter udledt,  
kræves integralregning.

Der stilles generelt store krav til overblik og  
systematik i disse eksperimenter.

### Didaktiske overvejelser

Beregningerne af stangens inertimoment kan  
forenkles ved at se bort fra hullerne, så stangens  
masse er jævnt fordelt over det rektangulære stykke.  
Dette medfører en fejl i stangens inertimoment  
omkring centret på lidt over 1 %.

Beregnete svingningstider for stangen alene vil øges  
med op til 0,5 %. (Størst afvigelse ved ophæng i  
centerhullet.) Med lodder monteret på stangen vil  
afvigelsen på svingningstiden være mindre.

En endnu mere oplagt forenkling kan ske ved at  
betragte bolte, møtrikker og spændeskiver som  
punktformede masser. Inertimomentet fejlberegnes  
da med under 0,08 %, svingningstiden med det halve.

Disse fejl vil formentlig kunne negligeres  
sammenlignet med måleusikkerheder og øvrige  
fejkilder ved arbejdet med det generelle fysiske  
pendul.

(Bemærk, at de nævnte fejl er irrelevante, når  
apparatet anvendes som reversionsspendul!)

Det virker fristende at udvide databehandlingen af  
eksperiment 2 – *Symmetrisk massefordeling* med en  
bestemmelse af loddernes inertimoment om egen  
centerakse. Dette kræver subtraktion af næsten ens  
størrelser, og vil derfor være behæftet med ganske  
stor usikkerhed. Det kan kun anbefales, hvis man  
ønsker at gå i dybden med usikkerhedsberegning –  
ellers vil afvigelserne mellem teori og måling kun  
skabe frustration.

Det bedste er at gentage eksperiment 2 for alle de  
mulige værdier af  $x_L$ , hvorefter  $I_G$  kan plottes som  
funktion af  $x_L^2$ .

Skæringen med y-aksen bliver da  $I_S + 2 I_L$ .

På [www.frederiksen.eu](http://www.frederiksen.eu) ligger der færdige regneark til  
bestemmelse af inertimomenterne mv.

Søg på varenummer 218100

## Detaljeret apparaturliste

### Specifikt for eksperimentet

218100 Fysisk pendul / Bessel-pendul  
001510 Skruetvinge

### Større apparater

Valgfrit: Tidtagning med SpeedGate  
197570 SpeedGate

Valgfrit: Tidtagning med fotocelle og timer  
200250 Elektronisk tæller  
197550 Fotocelle

Valgfrit: Tidtagning med dataopsamlingsudstyr  
Bevægelsessensor  
Link til PC eller datalogger

### Diverse standardudstyr

(Afhængigt af tidtagningsudstyr)

001600 Bordklemme  
002310 Stativmuffe, firkantet (1-2 styk anvendes)  
000850 Stativstang 25 cm  
000820 Stativstang 75 cm  
000100 Stativfod A-fod 2,0 kg

## Reklamationsret

Der er to års reklamationsret, regnet fra fakturadato.  
Reklamationsretten dækker materiale- og produktionsfejl.

Reklamationsretten dækker ikke udstyr, der er blevet mishandlet,  
dårligt vedligeholdt eller fejlmonteret, ligesom udstyr, der ikke er  
repareret på vort værksted, ikke dækkes af garantien.

Returnering af defekt udstyr som garantireparation sker for kundens  
regning og risiko og kan kun foretages efter aftale med Frederiksen.  
Med mindre andet er aftalt med Frederiksen, skal fragtbetøbet  
forudbetales. Udstyret skal emballeres forsvarligt.

Enhver skade på udstyret, der skyldes forsendelsen, dækkes ikke af  
garantien. Frederiksen betaler for returnering af udstyret efter  
garantireparationer.

© Frederiksen Scientific A/S

Denne brugsvejledning må kopieres til intern brug på den adresse  
hvortil det tilhørende apparat er købt. Vejledningen kan også hentes  
på vores hjemmeside